Section 3.2　The S-matrix

ここでは Heisenberg 描像を用いているため，状態 Ψ は全て時間に依存しないことに注意する。

■ていぎ

S-matrix を，$S_{\beta\alpha} := (\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha)$ として定義する。

> ここで『反応が起こる確率』をゲンミツに解釈すると，反応率は $|S_{\beta\alpha} - \delta^{(\bullet)}(\alpha - \beta)|^2$ としなければならない。例えば「終状態はどうでもいいけど，とりあえず反応は起きてほしい」というとき
>
> $$\int \mathrm{d}\beta\, |S_{\beta\alpha}|^2 = 1$$
>
> となってしまう。まぁここでは大した問題ではない。

知りたいのは，散乱前の粒子群が，散乱によってどう変化するか，つまりどういう粒子群にどういう確率で遷移するかということである。そして，時刻 $t = -\infty$ で固有状態 α だった状態と，時刻 $t = \infty$ で固有状態 β になる状態とを比較してやれば，その間にあったことが全て分かる。ここでは Heisenberg 描像ではあるが，$\Psi^\pm$ は共に時刻 $t = 0$ に揃えられているので，S-matrix は素直に (3.2.1) とすればよい。

> 細かいことを述べておくと，$\Psi^\pm_\alpha$ と書いた時の状態 α においては相互作用が無視できる，という仮定が為されているため，例えば「束縛状態 Ψ_B」などに対して $\Psi^\pm_B$ を考えることはできない。
>
> ところで，散乱問題などで，in state から時間発展させて，相互作用をさせた時に束縛状態が生じる場合がある。しかし，こういう束縛状態は必ず有限の寿命を持つ**はず**である[a]ので，問題ない。
>
> では，他からの相互作用を全く受けず，永遠に自分の中だけで相互作用をし続けるような状態があったらどうするのか。幸い，そういう状態は散乱では生じないので，問題ない。そして，きっとそういう状態は物理的にはどうやっても観測が出来ないはずなので，考えることに意味もないだろう。
>
> また，in state と out state はそれぞれ，「時刻 $t = -\infty$ で固有状態 α だった状態」，「時刻 $t = \infty$ で固有状態 β になる状態」であるので，全く同じ Hilbert 空間に属する。
>
> [a] 時間反転対称性？ でも T が破れたらこまるなぁ。

■せいしつ

In / out states は完全系を成しているので，$S^\dagger S = S S^\dagger = 1$ である[*1]。

■S 演算子と Møller 演算子

S-matrix の定義には，in とか out とかの文字が入っていたが，それがうざいので，in state と out state の，「その当時」の固有状態 Φ_α によって，S-matrix を定義する。つまり

$$S_{\beta\alpha} =: (\Phi^-_\beta, S\,\Phi^+_\alpha) \tag{3.2.4}$$

としたい。

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} :=& (\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) \\ =& \big(\Omega(+\infty)\Phi_\beta, \Omega(-\infty)\Phi_\alpha\big) \\ =& \big(\Phi_\beta, \Omega(+\infty)^\dagger \Omega(-\infty)\Phi_\alpha\big) \end{aligned}$$

というわけで，(3.2.5) とか (3.2.6) みたいな感じになる。

[*1] 無限次元の行列ではこういうひっくり返し系の処理が同値にならない。これまでに何回か出会ったことがある類の注意である。

■実はこれは既に扱った話だった。

$$\Psi^{\pm}_{g}(t)=\Phi_{g}(t)+\int \mathrm{d}\beta\ \mathscr{I}^{\pm}_{\beta;g}\Phi_{\beta} \tag{3.1.21}$$

$$\mathscr{I}^{\pm}_{\beta;g}:=\int \mathrm{d}\alpha\ \frac{\mathrm{e}^{-iE_{\alpha}t}g(\alpha)T^{\pm}_{\beta\alpha}}{E_{\alpha}-E_{\beta}+i\epsilon}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-iE_{\alpha}t}\ \mathrm{d}E_{\alpha}}{E_{\alpha}-E_{\beta}+i\epsilon}\ \overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\ -2\pi i\mathrm{e}^{-iE_{\beta}t}$ となることより，

$$\mathscr{I}^{+}_{\beta;g}\ \overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\ -2\pi i\,\mathrm{e}^{-iE_{\beta}t}\int \mathrm{d}\alpha\ \delta(E_{\alpha}-E_{\beta})g(\alpha)T^{+}_{\beta\alpha}$$

となる。

> この式変形には，幾つか補足が必要である。
>
> まず，**積分区間について。**
>
> そもそもこの積分は元々 $\mathrm{d}\alpha$ の積分であった。即ち $\mathrm{d}^{3}p_{\alpha}$ の積分である。この積分は $p^{2}\mathrm{d}p$ に対応し，mass shell 上での積分を考えると結局 $\int_{m}^{\infty}\mathrm{d}E_{\alpha}$ と云うことになり，Weinberg の積分 ($-\infty$ から ∞ まで) と食い違う。
>
> これを解消するには，『$E_{\alpha}>0$ でないならば $g(\alpha)=0$』とすればよい。こうすることにより積分範囲を $-\infty$ まで拡張でき，更に複素平面上の円弧の積分も意味づけることが出来る。
>
> 次に，**$g(\alpha)$ と T について。**
>
> この積分を正当化するには，$g(\alpha)$ と $T^{\pm}_{\beta\alpha}$ が極を持たないことが必要である。$g(\alpha)$ については，$E_{\alpha}>0$ では滑らかであり，それ以外では $g(\alpha)=0$ であるので，極を持たない。一方 $T^{\pm}_{\beta\alpha}$ は，($E_{\alpha}>0$ の部分に対しては) どうなるか微妙なところである。V，即ち H がそれほど奇妙な形でない，ということを要請しているように見える。

この積分により，Ψ^{+}_{g} の漸近形が

$$\begin{aligned}\Psi^{+}_{g}(t)\ &\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\ \Phi_{g}(t)+\int \mathrm{d}\beta\ \mathrm{e}^{-iE_{\beta}t}(-2\pi i)\int \mathrm{d}\alpha\ \delta(E_{\alpha}-E_{\beta})g(\alpha)T^{+}_{\beta\alpha}\Phi_{\beta}\\ &=\int \mathrm{d}\beta\ \mathrm{e}^{-iE_{\beta}t}\left[g(\beta)-2\pi i\int \mathrm{d}\alpha\ \delta(E_{\alpha}-E_{\beta})g(\alpha)T^{+}_{\beta\alpha}\right]\Phi_{\beta}\end{aligned}$$

となることがわかる。

一方，そもそもの定義式 (3.1.19) を out state と S 演算子で展開すると

$$\begin{aligned}\Psi^{+}_{g}(t)&:=\int \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{e}^{-iE_{\alpha}t}g(\alpha)\Psi^{+}_{\alpha}\\ &=\int \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{e}^{-iE_{\alpha}t}g(\alpha)\int \mathrm{d}\beta\ \Psi^{-}_{\beta}(\Psi^{-}_{\beta},\Psi^{+}_{\alpha})\\ &=\int \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{e}^{-iE_{\alpha}t}g(\alpha)\int \mathrm{d}\beta\ \Psi^{-}_{\beta}S_{\beta\alpha}\end{aligned}$$

となるが，ここで S 行列が $\delta(E_{\alpha}-E_{\beta})$ に比例すること[*2]を用いると，

$$\begin{aligned}\Psi^{+}_{g}(t)\quad &=\quad \int \mathrm{d}\beta\ \Psi^{-}_{\beta}\mathrm{e}^{-iE_{\beta}t}\int \mathrm{d}\alpha\ g(\alpha)S_{\beta\alpha}\\ &\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\quad \int \mathrm{d}\beta\ \Phi_{\beta}\mathrm{e}^{-iE_{\beta}t}\int \mathrm{d}\alpha\ g(\alpha)S_{\beta\alpha}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_{\beta\alpha}\ =\ \delta(\beta-\alpha)-2\pi i\,\delta(E_{\alpha}-E_{\beta})T^{+}_{\beta\alpha} \tag{3.2.7}$$

ということが分かった。ただし，ここで両辺は t に依存しない量であるので，$\overset{t\to\infty}{=}$ ではなく $=$ を用いた。

[*2] $(\Psi^{-}_{\beta},H\Psi^{+}_{\alpha})=(H\Psi^{-}_{\beta},\Psi^{+}_{\alpha})$ より $(E_{\alpha}-E_{\beta})S_{\beta\alpha}=0$ となるので。

■りっぷまんしゅういんがー。

まず，$(\Psi^\pm_\beta, V\Psi^\pm_\alpha)$ の両側に Lippmann-Schwinger 方程式を代入した式を等置して，Φ_γ の完全系をはさんでやる操作を考える。即ち，

$$
\begin{aligned}
\left(\Psi^\pm_\beta, V\Phi_\alpha\right) &= (T^\pm_{\alpha\beta})^* \\
\left(\Psi^\pm_\beta, V(E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V\Psi^\pm_\alpha\right) &= \left(\Psi^\pm_\beta, V\Phi_\gamma\right)\left(\Phi_\gamma (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V\Psi^\pm_\alpha\right) \\
&= (T^\pm_{\gamma\beta})^* (E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon)^{-1} (T^\pm_{\gamma\alpha})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\Phi_\beta, V\Psi^\pm_\alpha\right) &= T^\pm_{\beta\alpha} \\
\left((E_\beta - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V\Psi^\pm_\beta, V\Psi^\pm_\alpha\right) &= \left((E_\beta - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V\Psi^\pm_\beta, \Phi_\gamma\right)\left(\Phi_\gamma, V\Psi^\pm_\alpha\right) \\
&= (T^\pm_{\gamma\beta})^* (E_\beta - E_\gamma \mp i\epsilon)^{-1} (T^\pm_{\gamma\alpha})
\end{aligned}
$$

(積分の記述は省略) のようにしてやれば，速やかに

$$
\begin{aligned}
(T^\pm_{\alpha\beta})^* - T^\pm_{\beta\alpha} &= -\int \mathrm{d}\gamma\, (T^\pm_{\gamma\beta})^* T^\pm_{\gamma\alpha} \left(\frac{1}{E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon} - \frac{1}{E_\beta - E_\gamma \mp i\epsilon}\right) \\
&= -\int \mathrm{d}\gamma\, (T^\pm_{\gamma\beta})^* T^\pm_{\gamma\alpha} \frac{E_\beta - E_\alpha \mp 2i\epsilon}{(E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon)(E_\beta - E_\gamma \mp i\epsilon)}
\end{aligned}
\tag{3.2.9}
$$

$$
\therefore \left(\frac{T^\pm_{\alpha\beta}}{E_\beta - E_\alpha \pm i\epsilon}\right)^* + \frac{T^\pm_{\beta\alpha}}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} = -\int \mathrm{d}\gamma \left(\frac{T^\pm_{\gamma\beta}}{E_\beta - E_\gamma \pm i\epsilon}\right)^* \frac{T^\pm_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon}
$$

となる。ここで，行列 $Z^\pm_{\beta\alpha} := \delta(\beta - \alpha) + T^\pm_{\beta\alpha}/(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)$ を考えてやると，

$$
\int \mathrm{d}\gamma (Z^\pm_{\gamma\beta})^* Z^\pm_{\gamma\alpha} = \int \mathrm{d}\gamma \left[\delta(\gamma - \beta) + \frac{T^\pm_{\gamma\beta}}{E_\beta - E_\gamma \pm i\epsilon}\right]^* \left[\delta(\gamma - \alpha) + \frac{T^\pm_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon}\right] = \delta(\beta - \alpha)
$$

となる。(ひっくり返った方も同様。) ということはこれは unitary 行列であるということになる。

ところで，(3.1.17) 式より $\Psi^\pm_\alpha = \int \mathrm{d}\beta\, Z^\pm_{\beta\alpha} \Phi_\beta$ であるので，$Z^\pm_{\beta\alpha}$ が unitary であるということは

$$
\begin{aligned}
(\Psi^\pm_\beta, \Psi^\pm_\alpha) &= \int \mathrm{d}\gamma \int \mathrm{d}\delta\, (Z^\pm_{\delta\beta})^* Z^\pm_{\gamma\alpha} (\Phi_\delta, \Phi_\gamma) \\
&= \int \mathrm{d}\gamma \int \mathrm{d}\delta\, (Z^\pm_{\delta\beta})^* Z^\pm_{\gamma\alpha} \delta(\delta - \gamma) \\
&= \int \mathrm{d}\gamma\, (Z^\pm_{\gamma\beta})^* Z^\pm_{\gamma\alpha} \\
&= \delta(\beta - \alpha)
\end{aligned}
$$

という式変形より即ち in states や out states が其々完全正規直交系を成すことを意味する。以上が，(3.1.18) 式の少し下で述べられている『完全正規直交系であることの，もう少ししっかりした証明』である。[*3]

*3 一応確認しておくと，この Lippmann-Schwinger の議論においては，in/out の完全正規直交性は確かに用いていない。

ところで，Weinberg が最後に書いているように，(3.2.9) 式に $\delta(E_\alpha - E_\beta)$ を掛けてやれば，S 行列の unitary 性を示せる。[*4]即ち

$$
\begin{aligned}
\delta(E_\alpha - E_\beta)\left[(T^{\pm}_{\alpha\beta})^* - T^{\pm}_{\beta\alpha}\right] &= -\delta(E_\alpha - E_\beta)\int \mathrm{d}\gamma\, (T^{\pm}_{\gamma\beta})^* T^{\pm}_{\gamma\alpha}\left(\frac{1}{E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon} - \frac{1}{E_\beta - E_\gamma \mp i\epsilon}\right)\\
&= -\delta(E_\alpha - E_\beta)\int \mathrm{d}\gamma\, (T^{\pm}_{\gamma\beta})^* T^{\pm}_{\gamma\alpha}\frac{E_\beta - E_\alpha \mp 2i\epsilon}{(E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon)(E_\beta - E_\gamma \mp i\epsilon)}\\
&= \pm 2i\delta(E_\alpha - E_\beta)\int \mathrm{d}\gamma\, (T^{\pm}_{\gamma\beta})^* T^{\pm}_{\gamma\alpha}\frac{\epsilon}{(E_\gamma - E_\alpha)^2 + \epsilon^2}
\end{aligned}
$$

とした上で，energy についての積分を (先ほどの積分区間や T についての補足を考えた上で) 実行すると

$$
\int \mathrm{d}E_\gamma \frac{\epsilon}{(E_\gamma - E_\alpha)^2 + \epsilon^2} = \left[\arctan\frac{E_\alpha - E_\gamma}{\epsilon}\right]_0^\infty \xrightarrow{\epsilon\to 0} \pi
$$

となる。これより，

$$
\delta(E_\alpha - E_\beta)\left[(T^{\pm}_{\alpha\beta})^* - T^{\pm}_{\beta\alpha}\right] = \pm 2\pi i\cdot\delta(E_\alpha - E_\beta)\int \mathrm{d}\gamma\, (T^{\pm}_{\gamma\beta})^* T^{\pm}_{\gamma\alpha}
$$

という式が示された。

一方，(3.2.7) 式を用いると

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\gamma\, (S_{\gamma\beta})^* S_{\gamma\alpha} &= \int \mathrm{d}\gamma\, \left[\delta(\gamma - \beta) + 2\pi i\, \delta(E_\beta - E_\gamma)(T^{+}_{\gamma\beta})^*\right]\left[\delta(\gamma - \alpha) - 2\pi i\, \delta(E_\alpha - E_\gamma)T^{+}_{\gamma\alpha}\right]\\
&= \delta(\alpha - \beta) + 2\pi i\cdot\delta(E_\beta - E_\alpha)\left[(T^{+}_{\alpha\beta})^* - T^{+}_{\beta\alpha}\right] - (2\pi i)^2\int \mathrm{d}\gamma (T^{+}_{\gamma\beta})^* T^{+}_{\gamma\alpha}\delta(E_\gamma - E_\beta)\delta(E_\alpha - E_\gamma)\\
&= \delta(\alpha - \beta) + 2\pi i\left\{\delta(E_\beta - E_\alpha)\left[(T^{+}_{\alpha\beta})^* - T^{+}_{\beta\alpha}\right] - 2\pi i\cdot\delta(E_\beta - E_\alpha)\int \mathrm{d}\gamma (T^{+}_{\gamma\beta})^* T^{+}_{\gamma\alpha}\right\}
\end{aligned}
$$

となる。ここに先ほど示した式を用いれば

$$
\int \mathrm{d}\gamma\, (S_{\gamma\beta})^* S_{\gamma\alpha} = \delta(\beta - \alpha)
$$

となる。

[*4] 勿論，(3.2.2) 式周辺でやったように，$\Psi^{\pm}$ の完全正規直交性を用いれば簡単に示すことができる。恐らく，このような手法 (Lippmann-Schwinger 方程式を使ってアレコレやる方法) と云うのが比較的一般性の高い方法であり，故に Weinberg は教育的配慮からこの方法に言及した，と考えるのが自然だろう。