Chapter 8 — Invitation: Ultraviolet Cutoffs and Critical Fluctuations

岩本　祥 [ID:61508] (理学部物理学科 4 年)

2007 年 10 月 14 日

■Part II の概説

- Part 2 の目的 … 繰り込みの一般論。
  - 紫外発散がどうして生じるのか。
  - どのような場合に，発散を systematic に取り除くことが出来るのか。
    → 最終的には「散乱振幅の漸近的な振る舞いを知る」(運動量的な端っこにおける)。
- 点粒子の古典電磁気学でも発散が出てくるので，QFT でも仕方がない。
  → 発散が "physical prediction' に出て来さえしなければよい。
- "These theories, called *renormalizable* quantum field theories, are the only ones in which perturbation theory gives vell-defined predictions."

◆Formal and Physical Cutoffs

- 紫外発散 … large momentum / small distance [*1]
- Small distance cutoff には実例がある。
  - いわゆる原子の大きさ。
  - 流体力学では，粘度や音速は，分子の大きさと速度で決まる。
  - 磁性体では磁気感受率は，spin 反転が eV の程度であることから見積もれる。[*2]
  - 場の量子論では……micro な描像が分かってないからどうしようもない。
- 今度は或る程度距離のある相互作用の話。
  - 2 つの情報が必要。
    1. 短距離の parameter(つまり相互作用) は距離がある場合どう効いてくるのか。
    2. 長距離相互作用には「背後に潜む自由度」のうちどれが現れるのか。
  - 場の量子論は流体力学とは違い，長距離相互作用のためには質量がとても軽くなければならない。
    → Photon, chiral fermion, Goldstone boson (and electron)
    → 別の方法：Klein-Gordon 場の質量を小さくしたやつを考える。(→統計力学 ϕ^4 理論)
- というわけで統計物理学 (強磁性体)
  - Cluster が生じ，その大きさ (相関距離) は温度低下に伴い伸びていく。そして $T = T_C$ で相転移。
  - こういうのは，強磁性体だけでなく，合金，流体の critical point，^{4}He の超流動などで見られる。
- まぁそういうわけで，場の量子論と統計物理学には結構関係がある。
  - 2 次の相転移が QFT で表せる。質量の小さく，転移温度で 0 になるような場を用いて。
  - 統計物理は QFT でよく記述されるが，では内部構造が分からない場合はどうすればよいのか。
  - 統計物理学での "universality" がこの場合も維持され，逆に内部構造を推察できる。合金でも磁性体でも ^{4}He でも粒子の場でも同じようなことが成立する。

[*1] 運動量の大きな領域が即ち短距離，ってのは，直感的には Fourier 変換に対応する。或いは湯川型を想像する。

[*2] へー。どうやるんだろうねぇ。

◆Landau Theory of Phase Transitions

- Concrete example → Ferromagnet(強磁性体) s.t. 磁化の軸が決まっている (Ising 模型)
  - 温度 $T \ll 1$ 固定，磁場 $H = -\epsilon \to +\epsilon$ の時，磁化 M は不連続変化 ($H = 0$ で 1 次相転移)。
  - 温度を上げると揺動が大きくなり，$H = 0$ で 1 次相転移が消える ($T =: T_C$)。
- Landau 理論による考察
  - G : Helmholtz の**擬似**自由 energy : $\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + H\mathrm{d}M$
  - $G(T, M)$ を $M \simeq 0$ で Taylor 展開して

$$G(T, M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 + \mathrm{O}(M^6) \tag{8.2}$$

$$H(T, M) = \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3 + \mathrm{O}(M^5) \tag{8.3}$$

  - $H = 0$ では，$T \lesssim T_C$ に限り $M \neq 0$ の解を持つので

$$T \sim T_C \text{では } B(T) \sim b(T - T_C) \tag{8.4}$$ [*3]

  - あるいは磁場がある場合にはその効果 $-HM$ を付け加えても良い。

> 式 (8.2) はあくまでも擬似的な自由 energy であり，式 (8.6) を M について最小化したもの，つまり $G(M)$ の Legendre 変換が，Gibbs の自由 energy $G(T, H)$ に対応する。もちろんこれをもう一度 Legendre 変換すれば，Helmholtz の自由 energy $F(T, M)$ になる。

- 以上の考察を，磁化を spin の局所積分であるとして，連続的に考える。特に，ここでは $T \gtrsim T_C$ の時の相関長の振る舞いに注目する。

$$M = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\; s(\boldsymbol{x}) \tag{8.7}$$

$$G = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \left[\frac{1}{2}(\nabla s)^2 + b(T - T_C)s^2 + cs^4 - Hs\right] \tag{8.8}$$

  - G が最小となるのは，変分法より

$$-\nabla^2 s(\boldsymbol{x}) + 2b(T - T_C)s(\boldsymbol{x}) + 4c[s(\boldsymbol{x})]^3 - H(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{8.9}$$

  のときである。とりあえず s が小さいという **"近似"** を用いて

$$(-\nabla^2 + 2b(T - T_C))s(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x}) \tag{8.10}$$

  を考えると，Green 関数 $D(\boldsymbol{x})$ は次のようになる：

$$D(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\,\|\boldsymbol{x}\|}\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|/\xi} \qquad \text{where} \quad \xi := [2b(T - T_C)]^{-1/2}\,. \tag{8.15}$$

- この例のように，物体が強磁性体であるという情報無しに，相関長の温度依存性が定まる，という性質を universality という。
- Landau 理論は，特異点そばでは熱力学量が，ある決まった形で $T - T_C$ に依存する，ということを導出している。

  → この依存性により，universality class を分類できる。

[*3] ここで，$C(T) =: c > 0$ の条件は，$T < T_C$ で自発磁化を生じさせなければならないという事情のために課される。$c < 0$ だと，自発磁化が生じるためには G の単調減少性が必要となる。あるいは，$\mathrm{O}(M^6)$ 以上の項を全て抹消した上で十分大きな M に対する $G > 0$ を課した，とも考えられる。

◆Critical Exponents

- 以上のようなやり方は，量子統計を熱力学で近似している。Section 13 で，fluctuation をもっとゲンミツに説明する。
  - このような修正は直感にこそ反しているが，実は深い意味がある。
- 一般的に，相関関数は相関距離 ξ を用いて次のように書ける：

$$\langle s(\boldsymbol{x})s(0)\rangle = A\frac{1}{r^{1+\eta}}f(r/\xi) \qquad \text{where} \quad r := \|\boldsymbol{x}\|. \tag{8.17}$$

  - Landau 理論 (8.15) では，$\eta = 0$，f は単純な指数関数。
  - ξ は長距離の振る舞いを記述するので，cutoff 非依存の parameter となる。何となく cutoff には依存しない気がするけど……どういうこと？
- 湯川 potential (4.127) における質量 m が ξ^{-1} に対応している。
- (4.127) は摂動の最低次の寄与であるので，摂動の精度を上げて，式 (8.9) の s^3 の項まで考えたい。

$$\langle s(\boldsymbol{x})s(0)\rangle = \frac{1}{r}F(r/\xi, c) \tag{8.18}$$

- 実験結果は，(8.18) ではなく (8.17) を支持する。
  - つまり，c は不要であり，関数は universality class の中では同一となる。
  - その一方，η は 0 ではない値をとる。やはり universatity class の中では同じ。
- なぜこうなるのか。

  → 紫外発散を完全に解析することにより，Section 12 で示す。

参考文献

[1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, Jun. 1995.

[2] 西森秀稔. 『相転移・臨界現象の統計物理学』, 新物理シリーズ, 第 35 巻. 培風館, Nov. 2005.