◆ **The Quantized Dirac Field**

前半はこれまでに出てきた表式の整理である。

ただし，最初に場と運動量の反交換関係が

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x}), \pi_{\psi_b}(\boldsymbol{y})\} := \left\{\psi_a(\boldsymbol{x}), \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_b(\boldsymbol{y})}\right\} = i\left\{\psi_a(\boldsymbol{x}), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y})\right\}$$

となることに注意しておく。

場の生成消滅演算子 (運動量空間 or 座標空間上) [*1]

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_s\left(a_{\boldsymbol{p}}^s u^s(p)\mathrm{e}^{-ipx} + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} v^s(p)\mathrm{e}^{ipx}\right) \tag{3.99}$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_s\left(b_{\boldsymbol{p}}^s \bar{v}^s(p)\mathrm{e}^{-ipx} + a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p)\mathrm{e}^{ipx}\right) \tag{3.100}$$

交換関係

$$\left\{a_{\boldsymbol{p}}^r, a_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}\right\} = \left\{b_{\boldsymbol{p}}^r, b_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}\right\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs} \qquad \text{(Fock 空間)}^{*2} \tag{3.101}$$

$$\left\{\psi_a(\boldsymbol{x}), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y})\right\} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab} \qquad \text{(Heisenberg の量子条件⋯}\textbf{要請}\text{)}^{*3} \tag{3.102}$$

Fock **真空**

$$a_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle = b_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle = 0 \tag{3.103}$$

Stress-Energy Tensor

$$T^\mu{}_\nu = \begin{cases} i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\nu\psi & (\mu \neq \nu) \\ i\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\nu - \gamma^\rho\partial_\rho)\psi + m\bar{\psi}\psi & (\mu = \nu) \end{cases}$$

Hamiltonian

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\sum_s E_{\boldsymbol{p}}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^s + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^s) \qquad \text{(P.57 の式と同じ)} \tag{3.104}$$

Momentum

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \int \mathrm{d}^3x(T^{0i}) \\ &= \int \mathrm{d}^3x\psi^\dagger(-i\nabla)\psi = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\sum_s \boldsymbol{p}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^s + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^s)\end{aligned} \tag{3.105}$$

One-Particle State

$$|\boldsymbol{p}, s\rangle := \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}|0\rangle \tag{3.106}$$

$$\langle\boldsymbol{p}, r|\boldsymbol{q}, s\rangle = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs} \qquad \text{(Lorentz 不変量)} \tag{3.107}$$

[*1] この式は (3.92) 式とは表記が違うだけであり，同じ式である。

[*2] この式は本質的には (3.97) 式と同じであるが，**ただ書き写しただけではない**ことに注意。なお，この Fock 空間は運動量で label されている。

[*3] この 2 つの式の形が似ているのは……Fock 空間と座標空間を変換しただけだから当然なのかな?まったく同じ物理を別の空間で表しただけと考えて良いのよね?

さて。以上の式から分かるとおり，$a^\dagger$ と $b^\dagger$ はそれぞれ，fermion と antifermion の生成消滅演算子であり，fermion と antifermion は energy も momentum も等しい。

更に，spinor に対する Lorentz 変換 $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ は **unitary でなかった**が，Hilbert 空間 (Fock 空間のうちの 1 粒子部分) に対する Lorentz 変換の表現は **unitary である**ということもわかる。

■Lorentz 変換　Hilbert 空間に対する Lorentz 回転は $U(\Lambda)$ によった (See page 23)。Hilbert 空間の演算子 ψ は $U\psi U^{-1}$ のように変換する。

ここで $\Lambda x\cdot\Lambda p = x\cdot p$ に注意しつつ

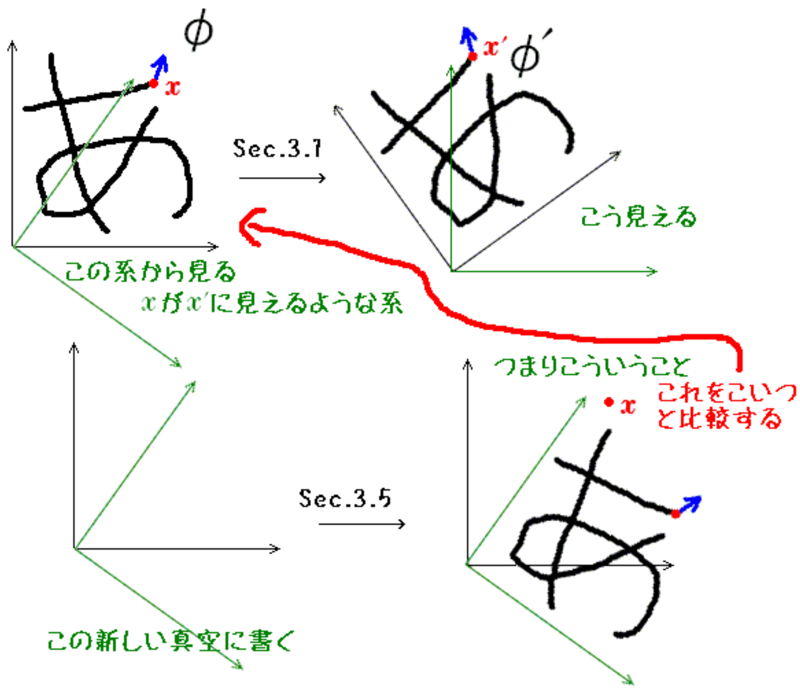
$$
\begin{aligned}
a\text{ の変換則：}\quad & Ua^s_{\boldsymbol{p}}U^{-1} = \sqrt{\frac{E_{\tilde{\boldsymbol{p}}}}{E_{\boldsymbol{p}}}}a^s_{\tilde{\boldsymbol{p}}} \\
\text{Lorentz 不変な積分：}\quad & \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} = \int\frac{\mathrm{d}^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\tilde{\boldsymbol{p}}}} \qquad \text{(See Eq.(2.40))} \\
\text{Spinor の変換：}\quad & u^s(p) = \Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}u'^s(\Lambda p) \qquad \text{(もちろん } U \text{ は spinor には作用しない)}
\end{aligned}
$$

を使えば,

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_s\left[\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\,(Ua^s_{\boldsymbol{p}}U^{-1})\,u^s(p)\mathrm{e}^{-ipx}+\cdots\right] \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\tilde{\boldsymbol{p}}}}\sum_s\left[\sqrt{2E_{\tilde{\boldsymbol{p}}}}\,a^s_{\tilde{\boldsymbol{p}}}\,u^s(p)\mathrm{e}^{-i\tilde{p}\cdot\Lambda x}+\cdots\right] = \Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda x) \qquad (3.110)
\end{aligned}
$$

となる。(合ってるよね?)

結局，Hilbert 空間の演算子を Λ により回転させると，これはつまり新しい真空に以前と同じ場を書くということになるわけである。その操作を古い系から見れば，古い真空で $x' = \Lambda x$ の位置にあったものを書く，もしそれが vector や spinor ならば回転を戻す向きに傾けて書く，ということになる。



■Spin　Dirac 方程式の平面波解 $u(p)\mathrm{e}^{-ipx}$ は 2 つの独立な解を持つ (See eq.(3.59))。これを spin state と呼んだ。これはこの粒子が spin 1/2 の粒子であることを示唆する。

ここでは，この spin が (軌道) 角運動量とは全く関係ないことを示す。

角運動量は回転に対する Noether current であるので，Lorentz 回転に対する Noether current を求めれば良い。例えば，z 軸周りの微小回転 $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ を考えると，$\psi(x) \to \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)$ となることから

$$\Delta\psi = -\theta(x\partial_y - y\partial_x + \frac{i}{2}\Sigma^3)\psi$$
$$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu\Delta\psi)$$

となる。*4ただしここで $\mathcal{L}$ は Lorentz 不変量なので $\mathcal{J} = 0$ であることに注意。

結局 z 軸周りの (時間的な) 保存量は $i\bar{\psi}\gamma^0\Delta\psi$ であることがわかった。

同様の考察から，**空間部分の回転に対しては**

$$\boldsymbol{J} := \int \mathrm{d}^3x\psi^\dagger\left[\boldsymbol{x}\times(-i\nabla) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\right]\psi \tag{3.111}$$

なる量，つまり**軌道角運動量 $\boldsymbol{x}\times(-i\nabla)$ と spin 角運動量 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ の和が保存する**ことが分かった。もちろん同時にこれは角運動量演算子の表式となる。

以上より，**非相対論的な fermion については**軌道角運動量と spin 角運動量が分割できたが，相対論的な場合はかなり複雑である。*5**故に**この量を ladder operators を用いて表すことは出来ない。

しかし Dirac 粒子が spin 1/2 を持つことを示すには，静止している場合のみを考えれば十分である。

この部分がとても分かっていません。まず，$J_z a_0^{s\dagger}|0\rangle = [J_z, a_0^{s\dagger}]|0\rangle$ が信じられない。だから $p = 0$ としてよいとも思えない。それ以前にそもそも P.61 のちょうど真ん中の式を見て，「Dirac 粒子が spin 1/2 なんだなぁ」と思うことが出来ない。

量子力学から単純に考えれば，期待値を計算することで処理できると言えそうだ。だから実際に計算して spin が 1/2 になるのを確認しよう。そう思ってやったのが付録 3.A。角運動量部分はどうやら 0 になりそう (全空間積分の対称性より) だが，spin 部分にどうしても x の積分が残ってしまう。

> Spin s，運動量 $\boldsymbol{p} = 0$ の粒子 ($p^0 = m$) の角運動量は $\langle 0|a_{\boldsymbol{0}}^s \boldsymbol{J} a_{\boldsymbol{0}}^{s\dagger}|0\rangle$ を計算すれば良い。その計算については付録 3.A に記した。結果は,
>
> $$\text{軌道角運動量：}\boldsymbol{L} = -\int \mathrm{d}^3x \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{q}) \tag{3.112}$$
> $$a \tag{3.113}$$
>
> となる。($t = 0$ の条件使ってないけど……いいよね。) 特に J_z について考えると $\pm 1/2$ となり，めでたしめでたし。

ちなみに，$\xi^s = \binom{1}{0}$ として定義された s に対して

$$J_z a_{\boldsymbol{0}}^{s\dagger}|0\rangle = 1/2, \qquad J_z b_{\boldsymbol{0}}^{s\dagger}|0\rangle = -1/2$$

と，粒子と反粒子とでは spin が逆になることに注意する。これは特に対生成・対消滅の場合に問題となる。

*4 この表式は，前回の rèsumè の "α を明示しない形" (page 5) である。

*5 つまり boost も考えるワケ? S^{0i} の表式が chaos なのでどうなることやら……。

■Charge　Charge は，$\psi \to \mathrm{e}^{i\alpha}\psi$ の無限小変換 (位相変換?) に対する Noether current である。

$$\Delta\mathcal{L} = -\alpha\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$$

であり，また $\mathcal{L}$ はまたもや不変であるため $\mathcal{J}=0$ として，時間的な保存量は

$$j^0 = \psi^\dagger\psi$$

である。これは微視的な保存量であり，巨視的な保存量は

$$Q = \int j^0 \mathrm{d}^3x = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\sum_s \left(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^s + b_{\boldsymbol{p}}^s b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}\right)$$

($-\boldsymbol{p}$ になってても良いんだよね?) あるいは無限大を無視して

$$Q = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\sum_s \left(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^s - b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} b_{\boldsymbol{p}}^{s}\right) \tag{3.113}$$

となる。**この Noether current は，電磁波と coupling させると電流密度だと見なせる (らしい) ので** (いずれ出てくるでしょう)，この表式は fermion と antifermion の電荷が，反対符号であることを意味する。

■Positron と Electron　量子電磁気学では，$a^\dagger$ を電子の，$b^\dagger$ を反電子の (Fock 空間における) 生成演算子だと考える[*6]ため，$\psi(x)$ は反電子の，$\bar{\psi}$ は電子の，座標空間上の生成演算子である。

◆ The Dirac Propagator

Propagation amplitude は (3.94)・(3.95) で導出してある。[*7]

Dirac 場の Green 関数 $S(x-y)$ は，その Fourier 変換に $(i\partial\!\!\!/ - m)$ を作用させることで

$$C\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(p\!\!\!/ - m)\mathrm{e}^{-ip(x-y)}\tilde{S}(p) \tag{3.119}$$

として与えられる。特に (Klein-Gordon と同様に)$C=i$ とすると (3.120) 式を経て

$$\tilde{S}(p) = (p\!\!\!/ + m)\tilde{D}(p)$$

となり，結局 $S(x-y) := \langle 0|\{\psi(x),\bar{\psi}(y)\}|0\rangle$，或いは

$$S_R^{ab}(x-y) := \theta(x^0-y^0)\langle 0|\left\{\psi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\right\}|0\rangle \tag{3.116}$$

となることがわかる。以上 Fourier 変換を経由して，Dirac 場の propagator が**反**交換関係であることを示したが，それとももしかしたらこれは自明なことなのか?$\{\psi,\bar{\psi}\}$ に直接 Dirac 作用素を作用させたら素直に δ になる，など，もっと直球的な説明があるのだろうか。

以下は Klein-Gordon の場合と同じである。[*8]ただし，今回は (3.115) 式からも分かるとおり，$x^0 < y^0$ の場合は負号を付けなければならない。

[*6] この section の前半では，a を fermion(正 energy) に，b を antifermion(負 energy) に対応付けていた。

[*7] 僕はまだ ψ の a, b への spinor 分解に慣れてないのでやりたくないのだ。

[*8] と書いておかないと，僕が P.30，P.31 をまだよく解っていない (多分真面目に留数計算をすればすぐわかるんだろうが) ことがばれてしまう。

3.A　Dirac 粒子が Spin 1/2 を持つこと

ここでは，spin s，運動量 $\boldsymbol{p}=0$ の粒子 $(p^0=m)$ の角運動量

$$\frac{\langle 0|a^s_{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{J}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{0}}|0\rangle}{\langle 0|a^s_{\boldsymbol{0}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{0}}|0\rangle} \tag{3.A.1}$$

の計算を愚直に実行する。

■角運動量部分　まず，$\langle 0|a^s_{\boldsymbol{0}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{0}}|0\rangle=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{0})$ であることに注意する。角運動量部分の分子は，

$$\int \mathrm{d}^3x\frac{\mathrm{d}^3p\ \mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}}\sum_{r,\rho}$$
$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{q})\left[\langle 0|a^s_{\boldsymbol{0}}a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^{\rho}_{\boldsymbol{q}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{0}}|0\rangle u^{r\dagger}(p)u^{\rho}(q)\mathrm{e}^{ix(p-q)}-\langle 0|a^s_{\boldsymbol{0}}b^{r}_{\boldsymbol{p}}b^{\rho\dagger}_{\boldsymbol{q}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{0}}|0\rangle v^{r\dagger}(p)v^{\rho}(q)\mathrm{e}^{ix(q-p)}\right] \tag{3.A.2}$$

となり，

$$\langle 0|a^s_{\boldsymbol{0}}a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^{\rho}_{\boldsymbol{q}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{0}}|0\rangle=(2\pi)^6\delta^{(3)}(\boldsymbol{p})\delta^{(3)}(\boldsymbol{q})\delta^{sr}\delta^{s\rho} \tag{3.A.3}$$
$$\langle 0|a^s_{\boldsymbol{0}}b^{r}_{\boldsymbol{p}}b^{\rho\dagger}_{\boldsymbol{q}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{0}}|0\rangle=(2\pi)^6\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{(3)}(\boldsymbol{0})\delta^{r\rho} \tag{3.A.4}$$

を用いれば

$$\int \mathrm{d}^3x\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{q})\left[\delta^{(3)}(\boldsymbol{p})\delta^{(3)}(\boldsymbol{q})u^{s\dagger}(p)u^{s}(q)-\sum_r\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{(3)}(\boldsymbol{0})v^{r\dagger}(p)v^{r}(q)\right]\mathrm{e}^{ix(q-p)}$$
$$=-\int \mathrm{d}^3x\ \mathrm{d}^3q\ \delta^{(3)}(\boldsymbol{0})(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{q}) \tag{3.A.5}$$

となる。結局角運動量は

$$\boldsymbol{L}=-\int\mathrm{d}^3x\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\ (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{q}) \tag{3.A.6}$$

空間の対称性より 0 としてよい?となる。

■Spin 部分　Spin 部分の計算もほぼ同様である。

$$\int \mathrm{d}^3x\frac{\mathrm{d}^3p\ \mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}}\sum_{r,\rho}$$
$$\left[\langle 0|a^s_{\boldsymbol{0}}a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^{\rho}_{\boldsymbol{q}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{0}}|0\rangle\frac{u^{r\dagger}(p)\boldsymbol{\Sigma}u^{\rho}(q)}{2}\mathrm{e}^{ix(p-q)}+\langle 0|a^s_{\boldsymbol{0}}b^{r}_{\boldsymbol{p}}b^{\rho\dagger}_{\boldsymbol{q}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{0}}|0\rangle\frac{v^{r\dagger}(p)\boldsymbol{\Sigma}v^{\rho}(q)}{2}\mathrm{e}^{ix(q-p)}\right] \tag{3.A.7}$$
$$=\int\mathrm{d}^3x\frac{1}{2m}\frac{u^{s\dagger}(m)\boldsymbol{\Sigma}u^{s}(m)}{2}+\int\mathrm{d}^3x\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\boldsymbol{p}}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{0})\sum_r\frac{v^{r\dagger}(p)\boldsymbol{\Sigma}v^{r}(p)}{2} \tag{3.A.8}$$

これ以上進めませんでした。まず (3.A.8) の第 2 項は本当に 0 になるのかな？ それから第 1 項で x の積分が残ってる & (分母にある)$\delta^{(3)}$ が出てきてないのがとても気になります。

参考文献

[1] 猪木慶治, 川合光. 『量子力学 II』. 講談社サイエンティフィク, Mar. 1994.